Triangle rectangle et trigonométrie

Chapitre G2 du livre

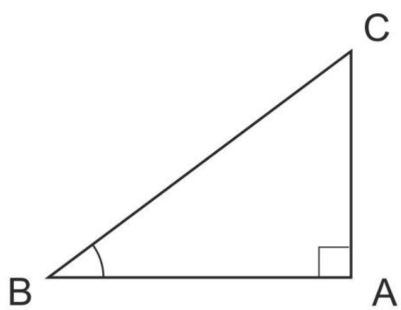
I. Utilité de la trigonométrie

La trigonométrie permet **dans un triangle rectangle** de **mettre en relation la mesure d'un angle aigu** et les **longueurs de deux de ses côtés.**

De ce fait on pourra :

- calculer la **longueur d'un côté**
- calculer la **mesure d'un angle**.

Vocabulaire :



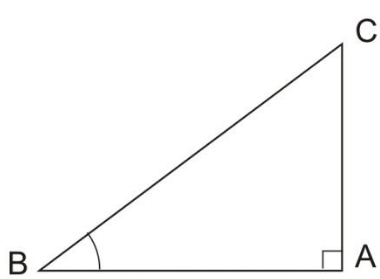
Dans ce triangle rectangle :

- Le côté [BC], opposé à l'angle de droit est **l'hypoténuse**
- Le côté [AC] est le **côté opposé** à l'angle $\hat{B}$
- Le côté [AB] est le **côté adjacent** à l'angle $\hat{B}$

II. Cosinus d'un angle aigu

1.) Définition

Dans un triangle rectangle, le **cosinus** d'un angle aigu est égal **au quotient du côté adjacent à cet angle par l'hypoténuse**.



Dans le triangle ABC rectangle en A :

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$$

Et donc :

$$AB = BC \times \cos\widehat{ABC}$$

et

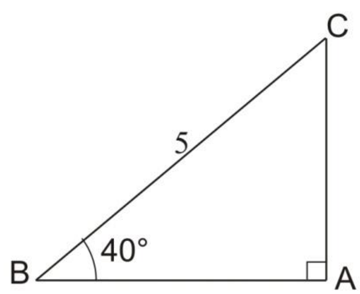
$$BC = \frac{AB}{\cos\widehat{ABC}}$$

Remarque

Le côté adjacent est toujours inférieur à l'hypoténuse donc **le cosinus est un nombre inférieur ou égal à un**.

2.) Utilisation pour calculer la longueur d'un côté

a. Calcul du côté adjacent



On connait **l'hypoténuse BC** : $\boldsymbol{BC = 5}$

On connait **l'angle $\widehat{ABC}$** : $\boldsymbol{\widehat{ABC} = 40°}$

On cherche la **longueur du côté adjacent AB**

$$cos\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$$

$$cos\ 40 = \frac{AB}{5}$$

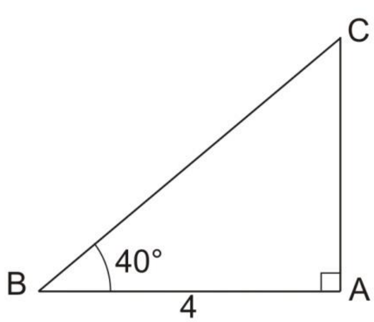
$$AB = 5 \times cos\ 40$$

$$AB \approx 5 \times 0{,}766$$

$$\boldsymbol{AB \approx 3,83}$$

Au centième d'unité près par défaut

b. Calcul de l'hypoténuse



On connait le côté **adjacent AB** : $\boldsymbol{AB = 4}$

On connait **l'angle $\widehat{ABC}$** : $\boldsymbol{\widehat{ABC} = 40°}$

On cherche la longueur de **l'hypoténuse BC**

$$cos\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$$

$$cos\ 40 = \frac{4}{BC}$$

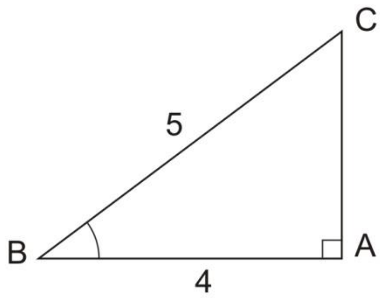
$$BC = \frac{4}{cos\ 40}$$

$$B \approx \frac{4}{0{,}766}$$

$$\boldsymbol{BC \approx 5,22}$$

Au centième d'unité près par défaut

3.) Utilisation pour calculer la mesure d'un angle



On connait le côté **adjacent AB** : $\boldsymbol{AB = 4}$

On connait **l'hypoténuse BC** : $\boldsymbol{BC = 5}$

On cherche la mesure de **l'angle** $\boldsymbol{\widehat{ABC}}$ **:**

$$cos\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$$

$$cos\widehat{ABC} = \frac{4}{5}$$

$$cos\widehat{ABC} = 0{,}8$$

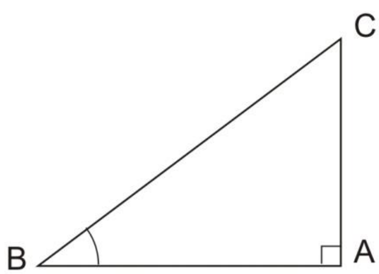
$$\boldsymbol{\widehat{ABC} \approx 37°}$$

Á un degré près par excès

III. Sinus d'un angle aigu

1.) Définition

Dans un triangle rectangle, le **sinus** d'un angle aigu est égal au **quotient du côté opposé à cet angle par l'hypoténuse.**



Dans le triangle ABC rectangle en A,

$$\boldsymbol{sin\widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}}$$

Et donc :

$$\boldsymbol{AC = BC \times sin\widehat{ABC}}$$

et

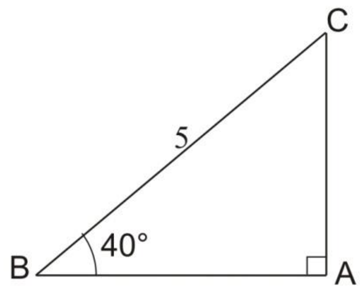
$$\boldsymbol{BC = \frac{AC}{sin\widehat{ABC}}}$$

<u>Remarque</u>

Le côté opposé est toujours inférieur à l'hypoténuse donc **le sinus est un nombre inférieur ou égal à un**.

2.) Utilisation pour calculer la longueur d'un côté

a. Calcul du côté opposé



On connait **l'hypoténuse BC** : $\boldsymbol{BC = 5}$

On connait **l'angle** $\boldsymbol{\widehat{ABC}}$: $\boldsymbol{\widehat{ABC} = 40°}$

On cherche la **longueur du côté opposé AC**

$$sin\widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$$

$$sin\,40 = \frac{AC}{5}$$

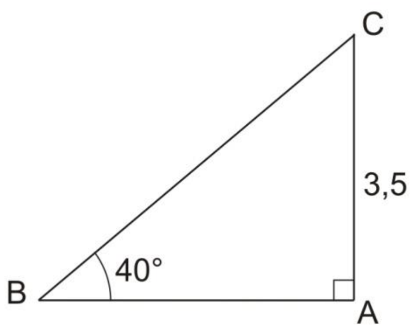
$$AC = 5 \times sin\,40$$

$$AC \approx 5 \times 0{,}643$$

$$\boldsymbol{AC \approx 3,21}$$

Au centième d'unité près par défaut

b. Calcul de l'hypoténuse



On connait le côté **opposé AC** :$\boldsymbol{AC = 3,5}$

On connait **l'angle** $\boldsymbol{\widehat{ABC}}$: $\boldsymbol{\widehat{ABC} = 40°}$

On cherche la longueur de **l'hypoténuse BC**

$$sin\widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$$

$$sin\,40 = \frac{3{,}5}{BC}$$

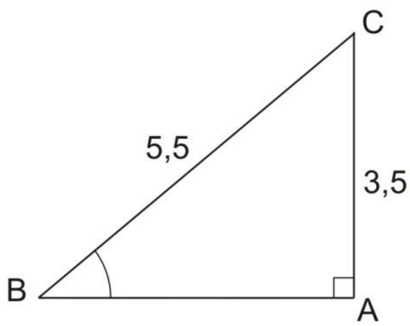
$$BC = \frac{3{,}5}{sin\,40}$$

$$B \approx \frac{3{,}5}{0{,}643}$$

$$\boldsymbol{BC \approx 5,45}$$

Au centième d'unité près par excès

3.) Utilisation pour calculer la mesure d'un angle



On connait le côté **opposé AC** : $\boldsymbol{AB = 3,5}$

On connait **l'hypoténuse BC** : $\boldsymbol{BC\ = 5{,}5}$

On cherche la mesure **de l'angle** $\boldsymbol{\widehat{ABC}}$:

$$sin\widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$$

$$sin\widehat{ABC} = \frac{3{,}5}{5{,}5}$$

$$sin\widehat{ABC} \approx 0{,}636$$

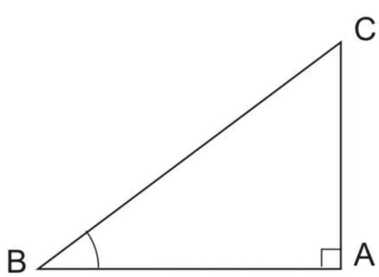
$$\boldsymbol{\widehat{ABC} \approx 40°}$$

Á un degré près par excès

IV. Tangente d'un angle aigu

1.) Définition

Dans un triangle rectangle, la **tangente** d'un angle aigu est égale au **quotient du côté opposé à cet angle par le côté adjacent.**



Dans le triangle ABC rectangle en A,

$$\boldsymbol{tan\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}}$$

Et donc :

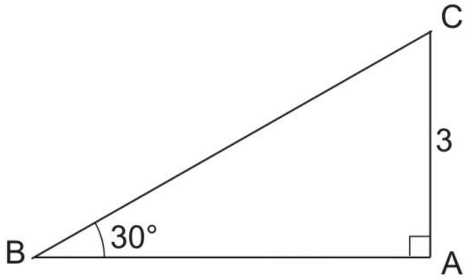
$$\boldsymbol{AC = AB \times tan\widehat{ABC}}$$

et

$$\boldsymbol{AB = \frac{AC}{tan\widehat{ABC}}}$$

2.) Utilisation pour calculer la longueur d'un côté

a. Calcul du côté adjacent



On connait **le côté opposé AC :** $\boldsymbol{AC = 3}$

On connait **l'angle** $\boldsymbol{\widehat{ABC}}$: $\boldsymbol{\widehat{ABC} = 30°}$

On cherche la **longueur du côté adjacent AB**

$$tan\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$$

$$tan30 = \frac{3}{AB}$$

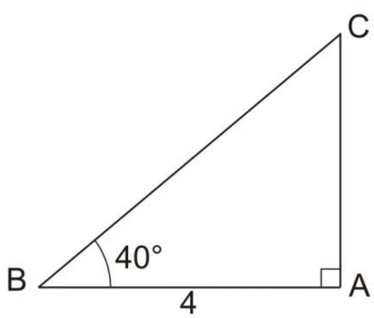
$$AB = \frac{3}{tan30}$$

$$AB \approx \frac{3}{0{,}577}$$

$$\boldsymbol{AB \approx 5{,}20}$$

Au centième d'unité près par excès

b. Calcul du côté opposé



On connait **le côté adjacent AB** : $\boldsymbol{AB = 4}$

On connait **l'angle** $\boldsymbol{\widehat{ABC}}$: $\boldsymbol{\widehat{ABC} = 40°}$

On cherche la **longueur du côté opposé AC**

$$tan\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$$

$$tan\,40 = \frac{AC}{4}$$

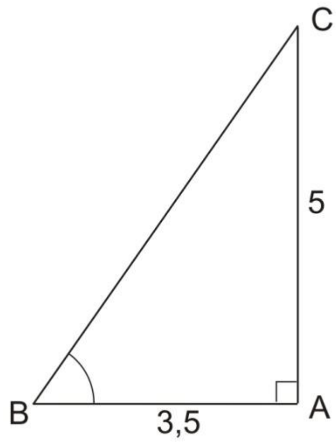
$$AC = 4 \times tan\,40$$

$$AC \approx 4 \times 0{,}839$$

$$\boldsymbol{AC \approx 3{,}36}$$

Au centième d'unité près par excès

3.) Utilisation pour calculer la mesure d'un angle



On connait le côté **opposé** AC : $\boldsymbol{AB = 5,5}$

On connait **le côté adjacent AB** : $\boldsymbol{AB = 3,5}$

On cherche la mesure **de l'angle** $\boldsymbol{\widehat{ABC}}$:

$$tan\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$$

$$tan\widehat{ABC} = \frac{5}{3,5}$$

$$tan\widehat{ABC} \approx 1{,}428$$

$$\boldsymbol{\widehat{ABC} \approx 55°}$$

Á un degré près par défaut