Fonction affine

Chapitre N 8 du livre

I. Définition et notations d'une fonction affine

1.) Définition :

Soit a et b deux nombres donnés.

Lorsque l'on associe à chaque nombre « x », la somme « $ax + b$», on définit **la fonction affine** de **coefficients** « a *et* b ».

2.) Notations

a. $f: x \rightarrow ax + b$

On lit **"à tout x on associe le nombre $ax + b$" ou "x a pour image a $x + b$"**

b. $f(x) = ax + b$

On lit **"f de x égal $ax + b$"**

On dit que $ax + b$ est **l'image** de x et que x est **l'antécédent** de $ax + b$

On calcule $ax + b$ **en fonction de** x, **a** et **b** sont des **coefficients**.

<u>**Exemple :**</u>

Soit $f: x \rightarrow 3x + 2$

*Quelle est **l'image** de 7 par la fonction f ?*

$f(7) = 3 \times 7 + 2$

$f(7) = 23$

L'image de 7 par la fonction f est 23.

Autre exemple :

Soit la fonction $g(x) = -2x + 5$

Calculer ***l'antécédent*** *de* -1 *par la fonction g.*

$g(x) = -2x + 5$

$g(x) = -1$

D'où l'équation :

$-2x + 5 = -1$

$-2x = -5 - 1$

$x = \frac{-6}{-2}$

$x = 3$

L'antécédent de -1 **par la fonction** g **est 3**

3.) Cas particuliers

Si $\boldsymbol{b = 0}$ la fonction est de la forme $f(x) = ax$, la fonction est appelée **fonction linéaire.**

Si $\boldsymbol{a = 0}$ la fonction est de la forme $f(x) = b$, la fonction est appelée **fonction constante.**

Exemples

$f(x) = 3x + 4$	est une fonction **affine**
$f(x) = 3x$	est une fonction **affine linéaire**
$f(x) = 9$	est une fonction **affine constante**

II. Représentation graphique d'une fonction affine

1.) Généralités

Soit f la fonction affine définie par : $\boldsymbol{f :\ x \longmapsto ax + b}$

- **L'ensemble des points** de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$ (**noté** $(\boldsymbol{x}\ ;\ \boldsymbol{y})$) est appelé **représentation graphique de la fonction affine**.

- Dans un repère, cette représentation est **une droite.**

- Cette droite a pour **équation** : $y = ax + b$
- Elle est **parallèle** à la droite représentative de **la fonction linéaire associée** d'équation $y = ax$.

- ***"a"*** est le **coefficient directeur** de la droite. Il indique " ***l'inclinaison*** " appelée ***la pente*** de la droite
- ***"b"*** est **l'ordonnée à l'origine**.

2.) Exemple général:

Soit la fonction affine :

$$f : x \rightarrow 2x - 3$$

Remarque :

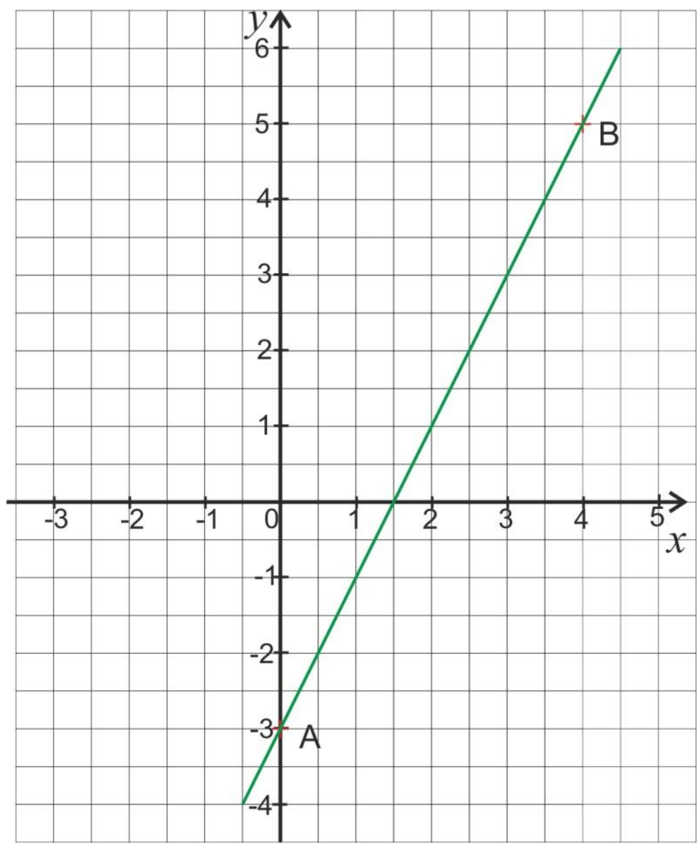
Pour tracer une droite, représentant une fonction affine, il faut connaître **deux** de ces points que l'on choisira de façon à simplifier les calculs

Mode opératoire	Fonction f affine $f : x \rightarrow 2x - 3$
Détermination des coordonnées de deux points de la droite	$A(x_A\ ;\ y_A)$ $B(x_B\ ;\ y_B)$
Choix de deux abscisses	$x_A = 0$ $x_B = 4$
Calcul des ordonnées correspondantes	$y_A = 2 \times 0 - 3$ $y_A = -3$ $y_B = 2 \times 4 - 3$ $y_B = 5$
Conclusion : Présentation des coordonnées	$A(0\ ;\ -3)\ et\ B(4\ ;\ 5)$

En résumé

$f : x \rightarrow\ 2x - 3$	**A**	**B**
x	**0**	**4**
y	**–3**	**5**

Construction de la droite



3.) Exemples particuliers

Soit les fonctions particulières :

$$g : x \to \frac{4}{5}x$$

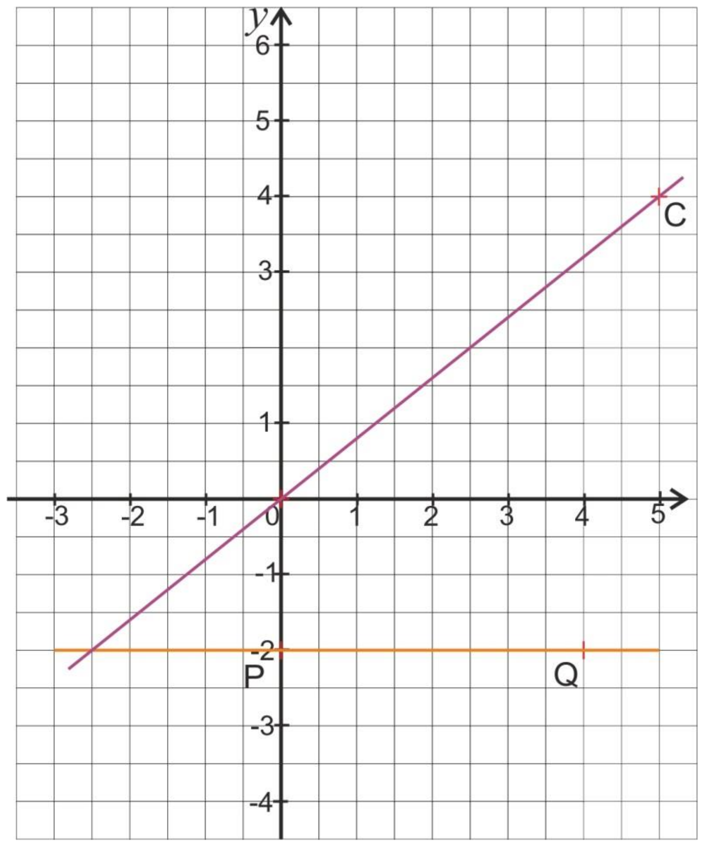
$$h : x \to -2$$

Mode opératoire	Fonction *g* linéaire $g : x \to \frac{4}{5}x$	Fonction *h* constante $h : x \to -2$
Détermination des coordonnées de deux points de la droite	Un seul point suffit autre que $O(0\ ;\ 0)$ $C(x_C\ ;\ y_C)$	Tous les points $P(x_P\ ;\ -2)$ conviennent
Choix des abscisses	$x_C = 5$	
Calcul des ordonnées correspondantes	$y_C = \frac{4}{5} \times 5$ $y_C = 5$	Aucun calcul
Conclusion : Présentation des coordonnées	$O(0\ ;\ 0)\ et\ C(5\ ;\ 4)$	$P(0\ ;\ -2)\ et\ Q(4\ ;\ -2)$

<u>En résumé :</u>

$g : x \to \frac{4}{5}x$	O	C
x	0	5
y	0	4

$h : x \to -2$	P	Q
x	0	4
y	–2	–2



III. Proportionnalité des accroissements

1.) Propriété

Soit $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux nombres relatifs et $\boldsymbol{f}$ une fonction affine telle que $f(x) = \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}$

Pour deux nombres distincts $\boldsymbol{x_1}$ et $\boldsymbol{x_2}$ on a :

$$\boldsymbol{f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)}$$

Ou encore :

$$\boldsymbol{a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}$$

Autrement dit, pour une fonction affine $f : x \longmapsto ax + b$, les **accroissements** des valeurs de *f (x)* sont **proportionnels** aux **accroissements** des valeurs de $\boldsymbol{x}$.

Le coefficient de proportionnalité $\boldsymbol{a}$ est le coefficient directeur (la pente) de la droite représentative

Remarque :

Démonstration de la propriété

$$f(x_2) = ax_2 + b$$

$$f(x_1) = ax_1 + b$$

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b)$$

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 - ax_1$$

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$$

2.) Application :

Cette propriété permet de **calculer le nombre *a*** , puis ensuite **le nombre *b*** connaissant **les images de deux nombres**

Exemple :

Soit une fonction affine de type $f(x) = ax + b$ à définir sachant que :

$$f(-5) = -13$$

$$f(3) = 11$$

- *Présentation des données du problème*

Soit une fonction affine de type $f(x) = ax + b$

On sait que $f(-5) = -13 \quad soit \quad -5a + b = -13$

On sait que $f(3) = 11 \quad soit \quad 3a + b = 11$

Or, si ***a*** et ***b sont*** deux nombres relatifs et ***f*** une fonction affine telle que $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$**,** alors pour deux nombres distincts $\boldsymbol{x_1}$ et $\boldsymbol{x_2}$ on a :

$$\boldsymbol{f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)}$$

- *Calcul de la valeur de a*

$$\boldsymbol{a} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{f(3) - f(-5)}{3 - (-5)}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{11 - (-13)}{8}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{24}{8}$$

$$\boldsymbol{a = 3}$$

- *Calcul de la valeur de b*

  On remplace « a » par sa valeur dans une des deux équations au choix.

$$-5 \times 3 + b = -13$$

$$b = 15 - 13$$

$$b = 2$$

- *Conclusion*

  La fonction affine f est

$$f(x) = 3x + 2$$

IV.Propriétés particulières des fonctions linéaires

1.) Fonction linéaire et somme :

Par une fonction linéaire, **l'image d'une somme** est **la somme des images**.

Si f est une fonction linéaire et x_1 et x_2 deux nombres alors :

$$\boxed{f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)}$$

Exemple :

Soit la fonction g telle que $g(2,5) = 10$ et $g(4) = 16$

Calculer l'image de $g(6,5)$

$$g(6,5) = g(2,5 + 4)$$

$$g(6,5) = g(2,5) + g(4)$$

$$g(6,5) = 10 + 16$$

$$g(6,5) = 26$$

2.) Fonction linéaire et produit :

Par une fonction linéaire, **l'image d'un produit par un nombre** est le **produit par ce nombre de l'image.**

Si ***f*** est une fonction linéaire, ***x*** un nombre et **k** un nombre donné, alors :

$$\boxed{\boldsymbol{f(kx) = kf(x)}}$$

Remarque :

Cette propriété peut s'écrire :

$$\boldsymbol{f\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{f(x)}{k}}$$

Exemple :

Soit la fonction ***g*** *telle que* ***g(2,5) = 10 et le nombre k = 5***

Calculer l'image de ***g(12,5)***

$$\boldsymbol{g(12,5) = g(5 \times 2,5)}$$
$$\boldsymbol{g(12,5) = 5 \times g(2,5)}$$
$$\boldsymbol{g(12,5) = 5 \times 10}$$
$$\boldsymbol{g(12,5) = 50}$$