Correction du DEVOIR II

Le théorème de Thalès, le théorème de Pythagore et des expressions littérales

<u>Exercice 1</u> (7 points)

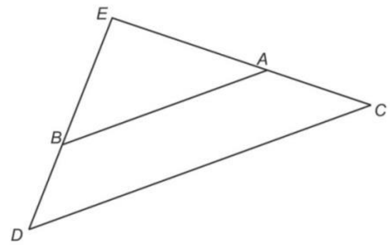
Données :

La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur.

Le point B appartient au segment [DE] et le point A au segment [CE].

ED=9cm ; EB=5,4cm ; EC=12cm ; EA=7,2cm et CD=15cm.

les droites (AB) et (CD) sont parallèles.



1. Calcul de la longueur du segment [AB].

On a une configuration de Thalès où :

- *Les droites (DB) et (CA) sont sécantes en E.*
- *Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.*
- *Les points E, B et D sont alignés dans le même ordre que les points E,A et C.*
- *ED=9 ; EB=5,4 et CD=15.*

Or, d'après le théorème de Thalès, si deux droites sécantes sont coupées par deux droites parallèles, alors celles-ci forment deux triangles aux côtés associés proportionnels.

Par conséquent, les triangles EAB et EDC ont leurs côtés associés proportionnels.

Ce qui se traduit par le tableau de proportionnalité ci-dessous :

Côtés du triangle EAB (cm)	EA	$EB = 5{,}4$	$AB = ?$
Côtés du triangle EDC (cm)	EC	$ED = 9$	$CD = 15$

D'où l'égalité et les calculs suivants :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EB}{ED}$$

$$\frac{AB}{15} = \frac{5{,}4}{9}$$

$$AB = \frac{5{,}4 \times 15}{9}$$

$$\boldsymbol{AB = 9}$$

La longueur du segment [AB] est de 9cm.

2. On démontre que le triangle ECD est un triangle rectangle.

Dans le triangle ECD, les côtés [EC], [ED] et [DC] mesurent respectivement 12cm, 9cm et 15cm.

On calcule d'une part le carré du plus grand côté :

$$DC^2 = 15^2$$

$$\boldsymbol{DC^2 = 225}$$

et d'autre part, la somme des carrés des deux autres côtés :

$$ED^2 + EC^2 = 9^2 + 12^2$$

$$ED^2 + EC^2 = 81 + 144$$

$$\boldsymbol{ED^2 + EC^2 = 225}$$

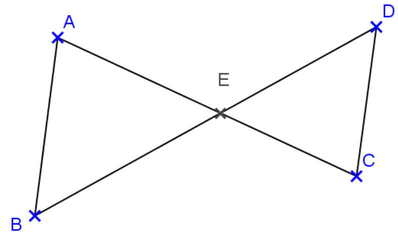
Par conséquent, $\boldsymbol{DC^2 = ED^2 + EC^2}$**.**

Or, si le carré du plus grand côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle, d'après la réciproque le théorème de Pythagore.

Donc, on peut affirmer que le triangle ECD est un triangle rectangle en E.

Exercice 2 (5 points)

On considère la figure ci-contre sur laquelle les dimensions ne sont pas respectées.



Données :

Les points A, E et C sont alignés ainsi que les points B, E et D.

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

AE= 7,1 cm ; EC = 5,4 cm et BE = 10 cm

Calcul de la longueur du segment [ED].

On a sait que, les droites (DB) et (CA) sont sécantes en E, que les droites (AB) et (CD) sont parallèles et que les points B, E et D sont alignés dans le même ordre que les points A, E et C.

AE = 7,1 cm ; EC = 5,4 cm et BE = 10 cm

Or, d'après le théorème de Thalès, les triangles EAB et EDC ont leurs côtés associés proportionnels.

EDC étant une réduction de ABC, le coefficient de proportionnalité k, se calcule ainsi :

$$k = \frac{EC}{AE}$$

$$k = \frac{5,4}{7,1}$$

$$\boldsymbol{k = \frac{54}{71}}$$

Par conséquent,

$$ED = k \times EB$$

$$ED = \frac{54}{71} \times 10$$

$$\boldsymbol{ED = \frac{540}{71}}$$

La longueur du segment [ED] est de $\frac{540}{71}$ *cm, soit une valeur approchée au dixième près par défaut de 7,6 cm.*

Exercice 3 (4 points)

Données :

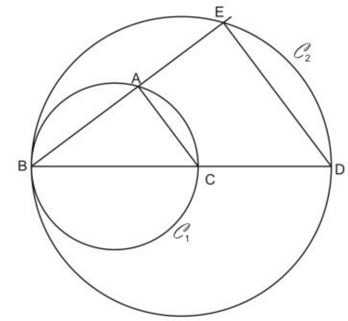
L'unité est le centimètre.

On considère le cercle $\mathscr{C}_1$ de diamètre [BC] et le cercle $\mathscr{C}_2$ de diamètre [BD].

A est un point de $\mathscr{C}_1$ et la droite (AB) coupe le cercle $\mathscr{C}_2$ au point E.

On donne BA= 4 ; BC= 5 et BD= 9.

La figure ci-contre n'est pas en vrai grandeur



1. Les triangles ABC et EBD sont rectangles.

   Parmi les trois propriétés suivantes, la propriété qui permet de démontrer ce résultat, dans cet exercice est :

   - *Si un triangle est inscrit dans un cercle et que l'un des côtés est le diamètre de son cercle, alors ce triangle est rectangle.*

2. Dans le triangle ABC rectangle en A, on calcule AC.

On sait que le triangle ABC est rectangle en A et que BA= $4cm$ et BC= $5cm$.

D'après le théorème de Pythagore, si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égale à la somme des carrés des deux autres côtés.

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$
$$AC^2 = BC^2 - AB^2$$
$$AC^2 = 5^2 - 4^2$$
$$AC^2 = 25 - 16$$
$$AC^2 = 9$$
$$AC = \sqrt{9}$$
$$\boldsymbol{AC = 3}$$

La longueur du segment [AC] est de 3cm.

Exercice 4 (4 points)

On vérifie si ABC est un triangle rectangle.

Soit x un nombre positif compris entre 0 et 10 et le triangle ABC tel que :

$AC = x + 7$

$AB = x + 8$

$BC = 5$

On calcule d'une part le carré du plus grand côté, [AB], puisque si $x = 0,\ AB = 8.$ *:*

$$AB^2 = (x + 8)^2$$

$$\boldsymbol{AB^2 = x^2 + 16x + 64}$$

et d'autre part, la somme des carrés des deux autres côtés :

$$AC^2 + BC^2 = (x + 7)^2 + 5^2$$

$$AC^2 + BC^2 = x^2 + 14x + 49 + 25$$

$$\boldsymbol{AC^2 + BC^2 = x^2 + 14x + 74}$$

On détermine pour quelle valeur de « x », $AB^2 = AC^2 + BC^2$*, en résolvant l'équation suivante :*

$$x^2 + 16x + 64 = x^2 + 14x + 74$$

$$x^2 - x^2 + 16x - 14x = 74 - 64$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{10}{2}$$

$$\boldsymbol{x = 5}$$

Si $x = 5\ alors,\ AB^2 = AC^2 + BC^2$ *et d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C.*

Et pour toute valeur de « x » différente de 5, $\boldsymbol{AB^2 \neq AC^2 + BC^2}$**.**

Or, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, si le carré du plus grand côté d'un triangle n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle n'est pas rectangle.

On peut donc affirmer que le triangle ABC n'est pas un triangle rectangle lorsque « x » est différent de cinq.